Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MECP

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles qualité et étude de la farine La Romaine (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2023/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l’eau d’un spa

Après avoir chauffé l’eau d’un spa à 38 °C, on coupe l’alimentation électrique et on modélise sa température en fonction du temps. La température extérieure reste constante à 25 °C et le modèle repose sur une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

L’équation est homogène à coefficients constants. Pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont les fonctions Ce^{-at}, où C est une constante réelle. Ici, $a = 0,05$, donc cette famille donne toutes les solutions sur l’intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer, sur [0 ; +∞[, une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Si y est constante, alors $y' = 0$. En notant cette constante k, l’équation devient $0,05k = 1,25$. On obtient $k = 1,25/0,05 = 25$. Cette fonction constante est définie sur tout l’intervalle $[0; +\infty[$ et vérifie bien l’équation différentielle complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

La solution générale de l’équation avec second membre est la somme d’une solution particulière et d’une solution de l’équation homogène. La solution particulière constante vaut 25, et les solutions homogènes sont $Ce^{-0,05t}$. On obtient donc la famille complète ci-dessous, pour tout réel C.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

La fonction f appartient à la famille des solutions trouvée à la question précédente. Sa condition initiale impose $f(0) = C + 25 = 38$, donc $C = 38 - 25 = 13$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient l’expression demandée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 dans le modèle : $f(24) = 13e^{-0,05\times 24} + 25 \approx 28,9155$. Arrondie au dixième, la température vaut $28,9\ ^\circ\text{C}$. Après 24 heures sans chauffage, l'eau du spa est donc à environ $28,9\ ^\circ\text{C}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(24) \approx 28,9\ ^\circ\text{C}$: après 24 h, l'eau est à environ $28,9\ ^\circ\text{C}$.

Question 2. a). Déterminer, pour tout réel t de [0 ; +∞[, une expression de f'(t).

On dérive le terme exponentiel en multipliant par la dérivée de son exposant, $-0,05$. La dérivée de la constante 25 est nulle. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 13 \times (-0,05)e^{-0,05t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[. Indiquer si ce résultat paraît cohérent avec le contexte de l'exercice et argumenter.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,05t} > 0$. Par conséquent, $f'(t) = -0,65e^{-0,05t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Ce résultat est cohérent avec la situation : une fois le chauffage coupé, l'eau refroidit et sa température se rapproche de celle de l'air extérieur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,05t \to -\infty$, donc $e^{-0,05t} \to 0$. Dans l'expression $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant demeure.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

La limite trouvée est $25\ ^\circ\mathrm{C}$. Dans le contexte, cela signifie que la température de l'eau se rapproche à long terme de la température ambiante extérieure, qui reste constante à $25\ ^\circ\mathrm{C}$. Le modèle décrit ainsi l'équilibre thermique du spa avec son environnement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau se rapproche de la température extérieure, soit $25\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 4. a). L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé après la coupure avant que l'alarme sonne. Donner la durée exacte, puis son arrondi à la minute.

On cherche d'abord quand l'eau atteint $36\ ^\circ\mathrm{C}$: $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$, puis $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cette durée vaut environ $200,465$ minutes. Comme l'alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à $36\ ^\circ\mathrm{C}$, elle sonne juste après cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Durée exacte : $20\ln(13/11)$ h. À la minute près : 200 min, soit 3 h 20 min.

Question 4. b). Exécuter l'algorithme donné et déterminer la valeur numérique qu'il affiche.

L'algorithme augmente H d'une heure puis calcule la température correspondante tant que $T \geq 34$. À $H = 7$, $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34,161$, donc la boucle continue. À $H = 8$, $T = 13e^{-0{,}05\times 8} + 25 \approx 33,714 < 34$, donc elle s'arrête et affiche H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme affiche 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

À chaque passage dans la boucle, H augmente d'une heure et la température modélisée est recalculée. L'algorithme s'arrête dès que cette température est strictement inférieure à $34\ ^\circ\mathrm{C}$. Il détermine donc le premier nombre entier d'heures auquel l'eau passe sous ce seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Il détermine le premier nombre entier d'heures où la température passe sous $34\ ^\circ\mathrm{C}$.

2. Contrôles qualité et étude de la farine La Romaine

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et le taux d'humidité de livraisons de blé, puis étudie la masse de ses sacs de farine. L'exercice examine aussi l'acceptation d'une nouvelle farine par ses clients et le nombre de clients susceptibles de la tester.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est la somme des mesures divisée par 5. L'écart-type de la série est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne :

$\bar{x} = 380/5 = 76$ mm et $\sigma = \sqrt{(28^2 + 5^2 + 7^2 + 19^2 + 21^2)/5} = \sqrt{332}$ mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm. Écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En prenant l'écart-type égal à 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs de la série n'est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ]. En déduire si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons.

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, l'intervalle de contrôle est :

Borne	Calcul	Valeur
Inférieure	$76 - 2 \times 18$	40 mm
Supérieure	$76 + 2 \times 18$	112 mm

Les mesures vont de 55 mm à 104 mm : elles sont toutes dans cet intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune valeur n'est hors de l'intervalle : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. Les deux camions contiennent respectivement 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et 14 540 kg à 14,1 %. Montrer que leur déchargement dans un même silo peut être autorisé, sachant que le taux d'humidité du mélange doit être inférieur à 13 %.

Le taux d'humidité du mélange se calcule en pondérant chaque taux par la masse du camion concerné.

Camion	Masse	Masse d'eau
1	29 540 kg	$29\,540 \times 0,124 = 3\,662,96$ kg
2	14 540 kg	$14\,540 \times 0,141 = 2\,050,14$ kg

Le mélange contient $5\,713,1$ kg d'eau sur $44\,080$ kg, soit environ 12,96 %, donc moins de 13 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux du mélange : environ 12,96 %. Le déchargement dans le même silo est autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Un sac de moins de 25 kg ne peut pas être vendu. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On standardise la masse : $Z = (X - 25,2)/0,1$. Pour la valeur seuil de 25 kg, on obtient $Z = (25 - 25,2)/0,1 = -2$. La probabilité recherchée est donc $P(Z < -2)$, la probabilité située à gauche de -2 dans la loi normale centrée réduite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$, à 10^{-3} près.

Question 2. a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^-2 près.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle centré $[\mu - 1,96\sigma ; \mu + 1,96\sigma]$. Ici, $\mu = 25,2$ et $\sigma = 0,1$:

$h = 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit 0,20 kg à 10^{-2} près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On peut prendre $h = 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique de la fonction de densité fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas représenter la densité de la variable aléatoire X.

La densité d'une loi normale est centrée sur sa moyenne, ici 25,2 kg. Avec un écart-type de 0,1 kg, environ 95 % des masses doivent se situer entre 25,004 kg et 25,396 kg. Or la courbe représentée est nettement plus étalée autour de 25,2 kg : son étalement est incompatible avec l'écart-type donné.

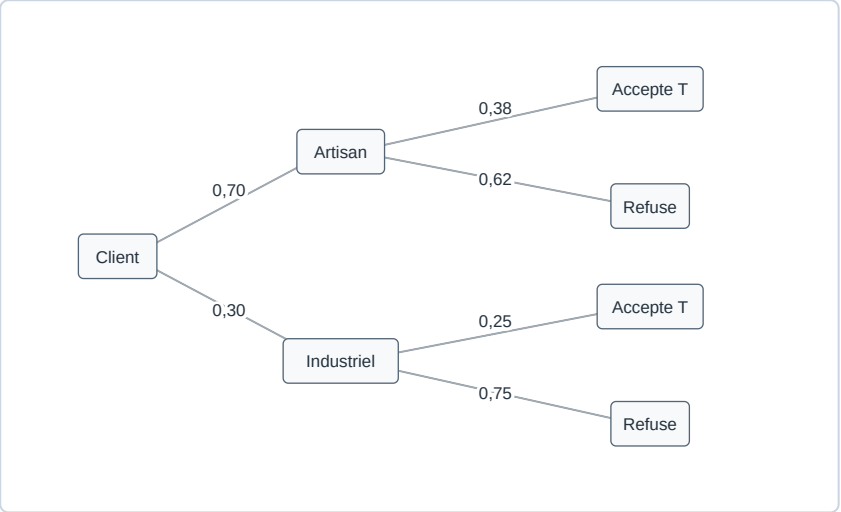
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée pour une loi de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré : 70 % des clients sont des artisans boulangers, 38 % de ces artisans acceptent de tester La Romaine et 25 % des boulangers industriels l'acceptent.

On note A l'événement « artisan boulanger » et T l'événement « accepte de tester La Romaine ». Les probabilités de la deuxième étape sont conditionnelles à la catégorie du client ; les probabilités de refus complètent chaque paire à 1.

Arbre pondéré : acceptation de La Romaine



Chaque paire de probabilités conditionnelles totalise 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Artisan : 0,70, puis acceptation 0,38 et refus 0,62. Industriel : 0,30, puis acceptation 0,25 et refus 0,75.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et qu'il accepte de tester la farine La Romaine.

L'événement demandé correspond au chemin « artisan » puis « accepte ». On multiplie la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$, soit 26,6 %.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les deux catégories de clients sont disjointes. La probabilité d'acceptation est la somme des probabilités des deux chemins menant à l'acceptation : $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,341.$

Question 3. Un client ayant testé La Romaine reprend contact avec le commercial. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité que ce client soit un artisan boulanger.

On cherche la probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a accepté le test. Par définition, $P_T(A) = P(A \cap T)/P(T)$. Ainsi, $P_T(A) = 0,266/0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité est $0,780$, à 10^{-3} près.

Question 4. a). La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé La Romaine.

Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, on additionne les probabilités des valeurs de 0 à 60 : $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$. À l'arrondi demandé, cette somme vaut 0,125.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 60) \approx 0,125$, à 10^{-3} près.

Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est $E(Y) = np$. Ici, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Cette espérance représente le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine dans des échantillons répétés de 200 clients.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine est 68,2 sur 200.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points; aucun coefficient n'est indiqué. Elle étudie le refroidissement de l'eau d'un spa et les contrôles d'une minoterie. Les compétences évaluées mobilisent équations différentielles, fonctions exponentielles, statistiques descriptives, lois normale et binomiale, et probabilités conditionnelles.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a; les solutions générales s'obtiennent en ajoutant les solutions de l'équation homogène.
- Le taux d'humidité d'un mélange est une moyenne pondérée par les masses : somme des produits masse × taux, divisée par la masse totale.
- Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle [μ − 1,96σ ; μ + 1,96σ].
- Pour Y suivant une loi binomiale B(n,p), P(Y ≤ k) est une probabilité cumulée et E(Y) = np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et les précisions demandées : heures, minutes, degrés, kilogrammes et arrondis.
- Pour le contrôle qualité, comparer chaque mesure à l'intervalle construit avec la moyenne et deux écarts-types.
- Distinguer probabilité conjointe, probabilité totale et probabilité conditionnelle dans l'arbre pondéré.
- Justifier les calculs et interpréter les résultats dans leur contexte professionnel.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de refroidissement ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution particulière constante. On additionne ces solutions et on utilise la condition initiale f(0) = 38 pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux camions ?

Multipliez la masse de chaque camion par son taux d'humidité, additionnez les masses d'eau obtenues, puis divisez par la masse totale de blé. Comparez le taux global au seuil strict de 13 %.

Q : Comment répartir son temps et traiter le barème dans cette épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 1 sont indépendantes. Le sujet ne détaille pas le barème par question; gérez votre temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier calculs et arrondis.

Q : Quels éléments de présentation et de justification faut-il soigner ?

Présentez les calculs ou les propriétés utilisés, conservez les unités et appliquez les arrondis demandés. Interprétez les résultats dans leur contexte, notamment pour la température du spa, le mélange de blé et les probabilités concernant les clients.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2023/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.