Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MECP

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2023/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres, lorsque le tiroir se ferme. L'exercice mobilise la résolution d'une équation différentielle, l'étude d'une fonction exponentielle, un algorithme de seuil et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour l'équation du second degré, le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$, donc il y a deux racines réelles distinctes. La formule donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On vérifie que chacune annule bien le trinôme. Ces deux racines serviront à écrire la solution générale de l'équation différentielle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en s'appuyant sur le tableau fourni.

L'équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$. Elle possède les deux racines réelles distinctes -1 et -4. D'après le tableau fourni, la solution générale est donc une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines. Sans condition initiale, les constantes restent arbitraires.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale décrite, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction $f(t)$ représente la distance OM, en centimètres. À l'instant initial, cette distance vaut 20 cm, ce qui donne directement $f(0) = 20$. La dérivée de la distance par rapport au temps est la vitesse de déplacement. Comme le tiroir se rapproche de O, cette vitesse est négative et vaut -10 cm·s^{-1}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression admise de f. Les deux termes exponentiels sont évalués exactement, sans arrondi : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Puisque f mesure la distance entre les points O et M, cette valeur est directement la distance demandée, exprimée en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est vraie et justifier.

À quatre secondes, l'expression de la distance donne $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Cette valeur est strictement inférieure au seuil de fermeture $0,5$ cm. La fonction étant continue, la distance franchit ce seuil avant 4 secondes. L'affirmation du constructeur est donc vérifiée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le tiroir est fermé avant 4 s, car $f(4) \approx 0,427 < 0,5$ cm.

Partie B

Question 1.a. À partir de l'expression de f(t) et de la limite rappelée pour e^{-u}, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Par la limite rappelée dans l'énoncé, e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers zéro. La limite de leur combinaison est donc nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

Une fonction qui admet une limite finie en $+\infty$ possède une asymptote horizontale d'équation égale à cette limite. Or la question précédente établit que $f(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$. La courbe $\mathcal{C}$ se rapproche donc de l'axe des abscisses, qui est l'asymptote demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de la dérivée f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Le second donne $-\frac{10}{3} \times (-4)e^{-4t} = \frac{40}{3}e^{-4t}$. La somme fournit la dérivée sur tout l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On sait que $f'(t) < 0$ sur $[0, +\infty[$, donc f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. Quand t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers zéro. Le tableau indique ainsi les valeurs aux bornes et le sens de variation.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant les valeurs de f(t) arrondies au centième et l'état de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

L'algorithme teste la condition $f(t) > 0,5$, puis augmente t de $0,1$ tant que cette condition est vraie. On calcule les valeurs aux instants successifs, arrondies au centième. Le test reste vrai à $3,8$ s et devient faux à $3,9$ s : il faut donc ajouter cette dernière ligne au tableau du sujet.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

La boucle s'arrête lorsque le test devient faux. À $t = 3,9$, on trouve $f(3,9) \approx 0,47$ cm, valeur inférieure au seuil de $0,5$ cm. À l'instant précédent, $t = 3,8$, la distance était encore supérieure au seuil. L'algorithme identifie donc le premier dixième de seconde où le critère de fermeture est satisfait.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé, car $OM \approx 0,47$ cm.

Question 4. À partir de la définition de la position moyenne m comme un quart de l'intégrale de f entre 0 et 4, démontrer l'expression exacte de m indiquée dans le sujet.

Une primitive de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. En évaluant cette primitive entre 0 et 4, puis en divisant par 4 selon la définition de m, on obtient :

$$m = \frac{1}{4}\left(\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right).$$

Le développement donne l'expression exacte demandée, en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

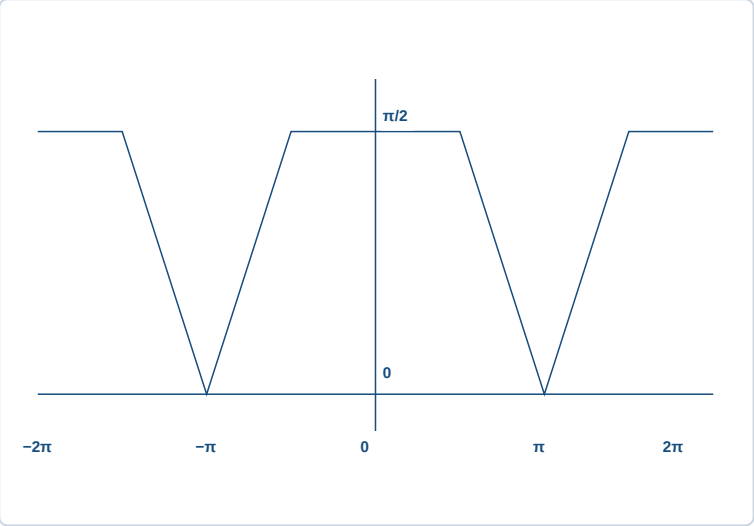
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], puis son développement en série de Fourier. Il demande de tracer la fonction, de déterminer ses coefficients et une somme partielle, puis d'exploiter des courbes et une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

Sur chaque période de longueur 2π, $f(t) = \pi/2$ sur le plateau central, puis décroît ou croît linéairement jusqu'à 0 aux multiples impairs de π. Répéter ce motif sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Courbe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe périodique paire : maximum $\pi/2$ et minimum 0, selon le tracé.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire et $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi; \pi]$ est nulle :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = 0.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Avec la période $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Par parité et périodicité, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Ainsi :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'expression de a_n comme somme des deux intégrales indiquées dans le sujet.

Comme f est paire et $T = 2\pi$, la formule du sujet donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en 0, $\pi/2$ et π, en utilisant les deux expressions de f :

$$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En admettant l'expression fournie de a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On utilise l'expression admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1, 2, 3$, les valeurs des cosinus donnent :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des coefficients précédents l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ indiquée dans le sujet.

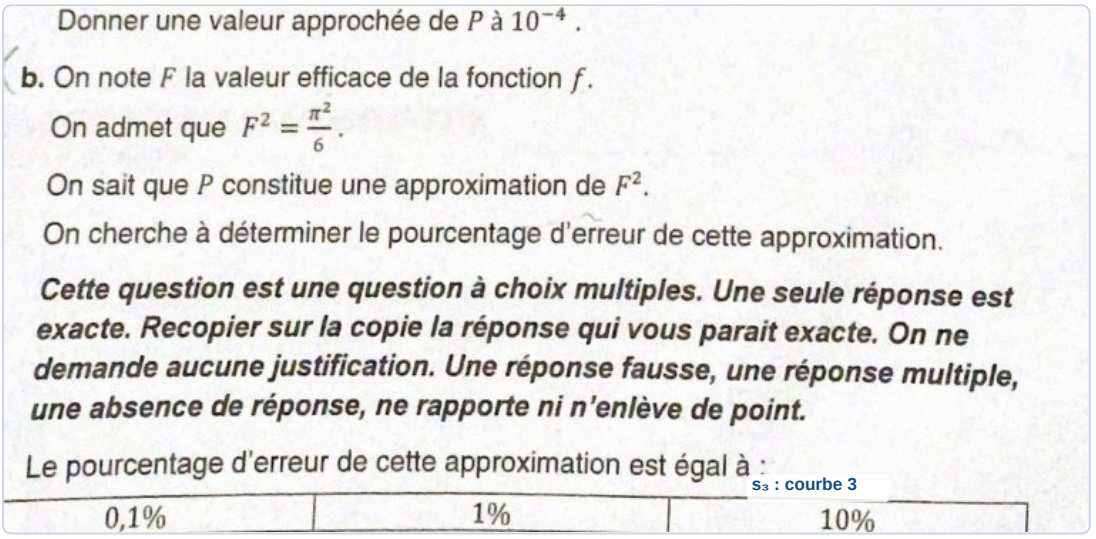
La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, car les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant par les valeurs obtenues :

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer sans justification laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La somme partielle présente des creux arrondis aux multiples impairs de π, comme sur la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



s_3 : courbe 3

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9.a. À partir de la définition de P en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

Avec $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$, on obtient :

$$P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{81\pi^2}\right) = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2} \approx 1{,}6437.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$ à 10^{-4} près.

Question 9.b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Recopier la réponse choisie sans justification.**

L'erreur relative est d'environ $0{,}0739\%$. Parmi les trois choix proposés, cela correspond à $0{,}1\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023 (code 23MATGRB2), dure 2 heures et comporte deux exercices notés chacun sur 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir puis les séries de Fourier d'une fonction paire, évaluant équations différentielles, fonctions, intégrales, algorithmique et représentation graphique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Pour $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, la limite en $+\infty$ vaut 0 et l'asymptote horizontale est $y = 0$.
- Pour une fonction paire, les coefficients de Fourier b_n sont nuls et les coefficients a_n se calculent sur une demi-période.
- La pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$; pour la période $T = 2\pi$ de cet exercice, $\omega = 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle du tiroir : f(t) est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'algorithme, vérifier la condition après chaque incrément de t et poursuivre tant qu'elle reste vraie.
- Pour le tracé, tenir compte à la fois de la définition par morceaux, de la parité et de la période 2π.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2 et choisir parmi les trois valeurs proposées.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales dans l'équation différentielle du tiroir ?

La distance initiale donne $f(0) = 20$ cm. La vitesse initiale négative de 10 cm·s^{-1} correspond à $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}. Ces deux conditions permettent de déterminer les constantes de la solution de l'équation différentielle.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur les séries de Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Ainsi, les coefficients associés aux sinus vérifient $b_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre l'étude du tiroir et les séries de Fourier, puis gardez une marge pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les réponses à reporter sur le document-réponse.

Q : Le sujet fournit-il un barème détaillé par question ou des tolérances de notation ?

Le sujet indique 10 points pour chacun des deux exercices, sans détailler les points par question. Il faut respecter les demandes de justification et les arrondis précisés, ainsi que la consigne particulière de répondre sans justification au choix multiple.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2023/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.