Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MECP

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude de sa vitesse (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'un système électrique par transformation de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2022/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude de sa vitesse

Un chariot de fête foraine avance à 20 m·s⁻¹ avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est étudiée au moyen d'une équation différentielle, de ses variations, d'une primitive et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur [0 ; +∞[.

L'équation est homogène et correspond à la forme donnée dans le sujet, avec le coefficient $a = 0,8$. Les solutions sont donc les fonctions exponentielles associées au coefficient opposé, multipliées par une constante réelle. Aucune condition initiale n'est imposée dans cette question : la constante reste arbitraire. Cette famille fournit toutes les solutions définies et dérivables sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$.
2. En substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Le membre de gauche est égal au second membre pour tout t. La fonction proposée vérifie donc bien l'équation différentielle complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, $g(t) = 5$ est solution.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète, comme vérifié à la question précédente. Toute solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée. Celle-ci est de la forme $ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle arbitraire. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

> On part de la solution générale $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À l'instant initial, l'exponentielle vaut $e^0 = 1$, donc la condition imposée devient $k + 5 = 20$. On en déduit $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante réelle par cette valeur, on obtient la solution qui respecte la condition initiale.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le produit $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Par conséquent, le terme exponentiel $15e^{-0,8t}$ tend aussi vers zéro. Le terme constant ne varie pas : la limite de la somme est donc égale à 5.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

1. D'après la question précédente, $f(t)$ tend vers le nombre fini 5 lorsque t tend vers $+\infty$.
2. Une limite finie en $+\infty$ signifie que la courbe se rapproche d'une droite horizontale dont l'ordonnée est cette limite.

La courbe C admet donc une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. La dérivée $f'(t) = -12e^{-0,8t}$ est donc strictement négative : f décroît sur tout l'intervalle. De plus, $f(0) = 15 + 5 = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5. Le tableau résume ces variations.

t	**0**		$+\infty$
$f'(t)$		–	
$f(t)$	20	↘	5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Un arrêt complet nécessiterait que la vitesse atteigne zéro. Or f décroît à partir de 20 et tend vers 5 m·s^{-1}. Pour tout temps fini, le terme $15e^{-0,8t}$ reste strictement positif, donc la vitesse reste supérieure à 5 m·s^{-1}. Dans le modèle donné, le chariot ralentit mais ne s'arrête jamais.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers 5 m·s^{-1}, et non vers zéro.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$ en appliquant la règle de la chaîne à l'exponentielle. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, d'où $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression étant celle de $f(t)$, la fonction F est bien une primitive de f sur l'intervalle indiqué.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 étant donnée par l'intégrale de f entre ces instants, calculer la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centimètre.

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive F, on a $d = F(1) - F(0)$, où $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. La différence donne $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Numériquement, cela vaut environ 15,3251 mètres, soit 15,33 mètres au centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les réponses proposées, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte ; la recopier sans justification.

Le polynôme affiché par le logiciel est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit comme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Il faut donc recopier la proposition qui conserve les trois termes du polynôme et place le facteur t^2 devant le reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse t_0 est $y = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$. Ici, $t_0 = 0$, $f(0) = 20$, et le coefficient de t dans le développement limité donne $f'(0) = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ avec une pente de -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d'un système électrique par transformation de Laplace

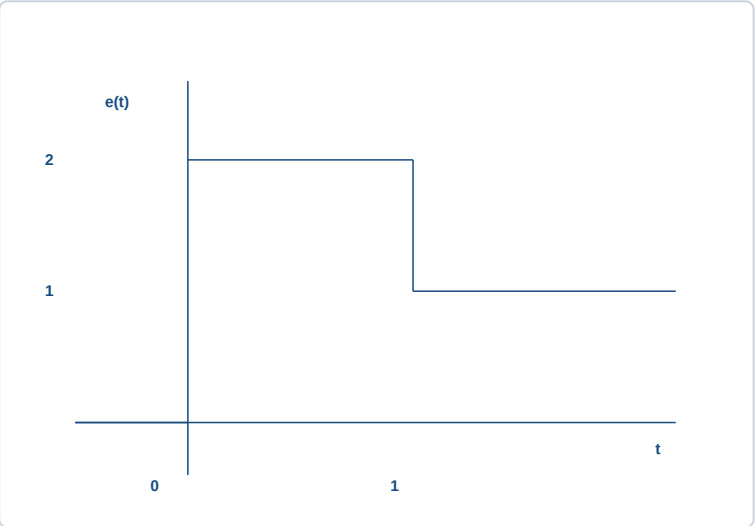
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice porte sur le tracé et la transformée de Laplace des signaux, puis sur la détermination et l'étude du signal de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

1. Pour $t<0$, $e(t)=0$.
2. Pour $0\leq t<1$, $e(t)=2$.
3. Pour $t\geq 1$, $e(t)=1$.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Signal en créneau : 0 avant 0, 2 de 0 à 1 exclu, puis 1 à partir de 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité et décalage temporel, $\mathcal{L}\{U(t)\} = \frac{1}{p}$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = \frac{e^{-p}}{p}$. Donc $E(p) = 2\mathcal{L}\{U(t)\} - \mathcal{L}\{U(t-1)\}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).

1. La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$.
2. En remplaçant $H(p) = \frac{1}{p+1}$ et $E(p) = \frac{2-e^{-p}}{p}$, on obtient $S(p) = \frac{2-e^{-p}}{p(p+1)}$.
3. La séparation des deux termes donne l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

En mettant au même dénominateur, $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}$. L'égalité est ainsi vérifiée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Expression	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

Les deux dernières lignes résultent du décalage temporel d'une unité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des questions précédentes l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition donne $s(t) = 2(1-e^{-t}) - U(t-1)(1-e^{-(t-1)})$. Sur $[0;1[$, $U(t-1) = 0$, donc le terme retardé s'annule.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$: $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1). Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

1. On remplace t par 1 dans la formule donnée.
2. $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$.
3. La valeur approchée au dixième est 1,3.

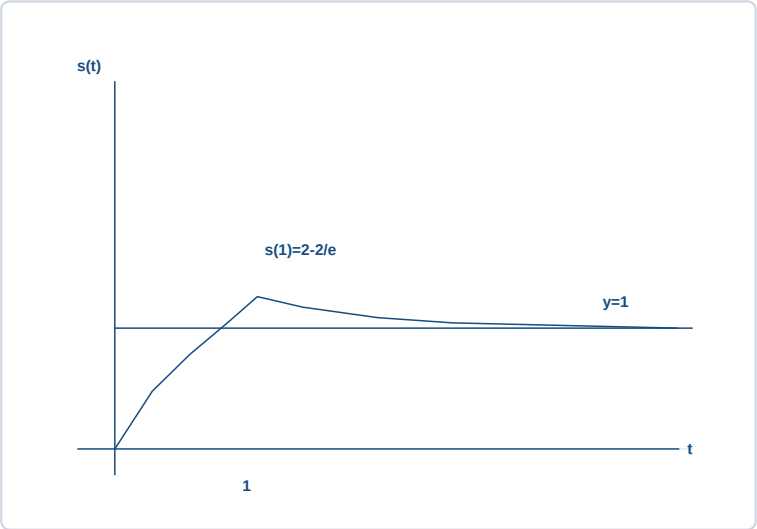
✓ RÉPONSE À RETENIR

$$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3$$

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ croît de 0 à $s(1) = 2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$ décroît vers 1. La courbe est continue au point d'abscisse 1.

Courbe représentative de s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe croissante jusqu'à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroissante vers l'asymptote $y = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Comme $e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, le terme $(e-2)e^{-t}$ tend vers 0 dans l'expression donnée de $s(t)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, mobilisant équations différentielles, analyse de fonction, développement limité et transformations de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t)dt.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap) : l'exponentielle représente le retard.

Points de vigilance & attentes du jury

- Conserver les unités de vitesse et de distance et arrondir la distance au centimètre, comme demandé.
- Distinguer solution homogène, solution particulière et condition initiale dans la résolution différentielle.
- Pour le développement limité, vérifier le coefficient du terme quadratique et la condition imposée au reste.
- Pour les signaux retardés, utiliser le facteur exponentiel de Laplace et distinguer les intervalles avant et après t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot pendant la première seconde ?

On intègre la vitesse sur [0 ; 1]. Avec la primitive F donnée, la distance vaut F(1) - F(0), en mètres. Il faut ensuite arrondir le résultat au centimètre.

Q : Comment traiter le terme retardé dans la transformation de Laplace ?

Un signal retardé f(t - a)U(t - a) a pour transformée F(p)e^(-ap). Ici, le retard vaut 1, donc la transformée du terme retardé comporte le facteur e^(-p).

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices notés chacun sur 10 points. Le sujet ne donne pas de détail de barème pour les différentes questions à l'intérieur de chaque exercice.

Q : Quels coefficients s'appliquent aux spécialités indiquées sur le sujet ?

Le coefficient est de 1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 pour Électrotechnique. Pour la question à choix multiple, une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2022/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.