Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MECP

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle (12 questions) **Page 3**

2. Défauts de fabrication, durée de vie et conformité de rivets (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2022/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m/s sur un axe horizontal, puis est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée à l'aide d'une équation différentielle, de l'analyse de sa courbe et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

On applique la formule des solutions de $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. On définit g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, égal au membre de droite pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La solution générale de l'équation homogène associée est $ke^{-0,8t}$. Comme $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E), les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant cette solution particulière à la solution homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = ke^0 + 5 = 20$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la solution demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

Une fonction qui tend vers une limite finie en $+\infty$ possède une asymptote horizontale d'équation égale à cette limite. Ici, la limite de $f(t)$ est 5 : l'asymptote à la courbe C est donc la droite horizontale correspondante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 15 + 5 = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse reste toujours positive. Elle tend vers 5 m/s sans jamais atteindre zéro. D'après ce modèle, le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers 5 m/s sans atteindre zéro.

Question 4. a. **Pour F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$, donc F est bien une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **À l'aide de la formule de l'énoncé, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant par l'expression de la primitive, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m. Cette valeur exacte est environ $15,3251$ m ; arrondie au centimètre, elle vaut $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les expressions proposées, recopier l'unique développement limité exact de f à l'ordre 2 au voisinage de 0. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le développement limité à l'ordre 2 doit s'écrire avec un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la proposition qui présente ce reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 15 + 5 = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Défauts de fabrication, durée de vie et conformité de rivets

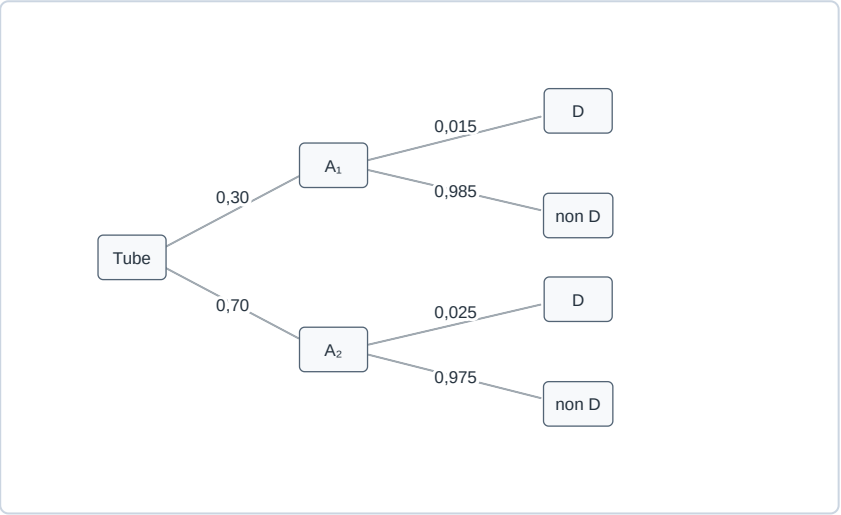
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers aux parts de production et taux de défaut différents, puis modélise leur durée de bon fonctionnement par une loi exponentielle. L'exercice étudie également l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 pièces.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant l'origine des tubes selon l'atelier de production et la présence ou l'absence d'un défaut, à partir des données de l'énoncé.

L'arbre commence par l'atelier d'origine : 30 % des tubes viennent de l'atelier 1 et 70 % de l'atelier 2. Depuis chaque atelier, on distingue les tubes défectueux et ceux sans défaut. Les taux de défaut conditionnels sont respectivement 0,015 et 0,025 ; leurs probabilités complémentaires sont 0,985 et 0,975.

Arbre pondéré : origine et défaut



Les probabilités du deuxième niveau sont conditionnelles à l'atelier.

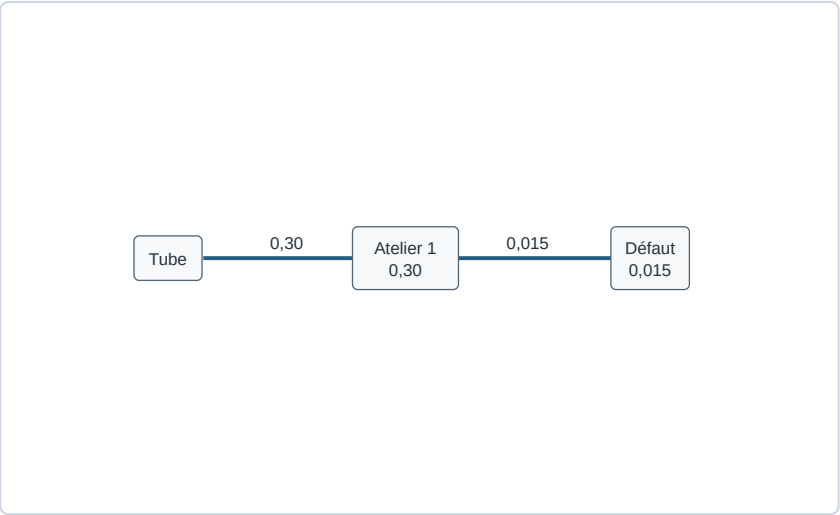
✓ RÉPONSE À RETENIR

A_1 : 0,30 ; puis D : 0,015 ou non D : 0,985. A_2 : 0,70 ; puis D : 0,025 ou non D : 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P($A_1 \cap D$) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

Le chemin « atelier 1 puis défaut » se calcule en multipliant la part de production de l'atelier 1 par son taux de défaut conditionnel. Ainsi, avec les données de l'énoncé : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. La probabilité cherchée est donc 0,45 %.

Chemin A_1 puis défaut



La probabilité du chemin est le produit des deux probabilités des branches.

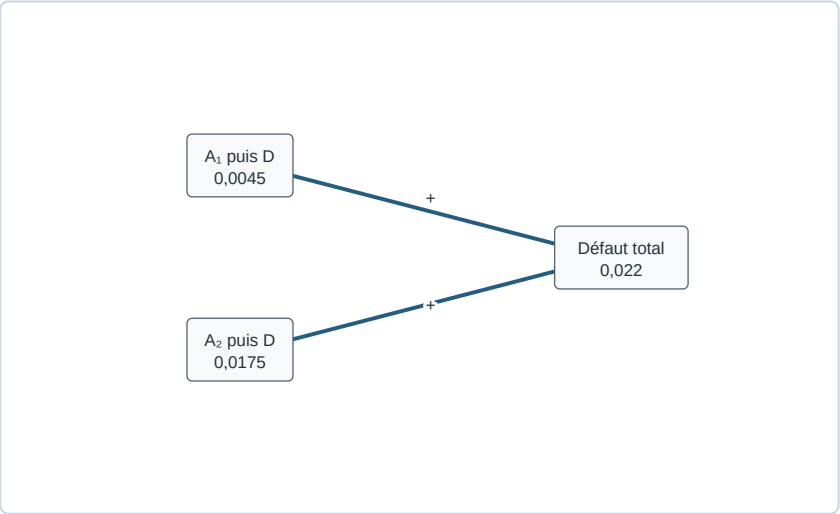
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.

Les deux ateliers peuvent produire un tube défectueux. Les chemins correspondants étant incompatibles, on additionne leurs probabilités : $P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D)$. Ainsi, $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$. Cela correspond à 2,2 % de la production totale.

Addition des deux chemins menant au défaut



Les probabilités des deux origines possibles sont additionnées.

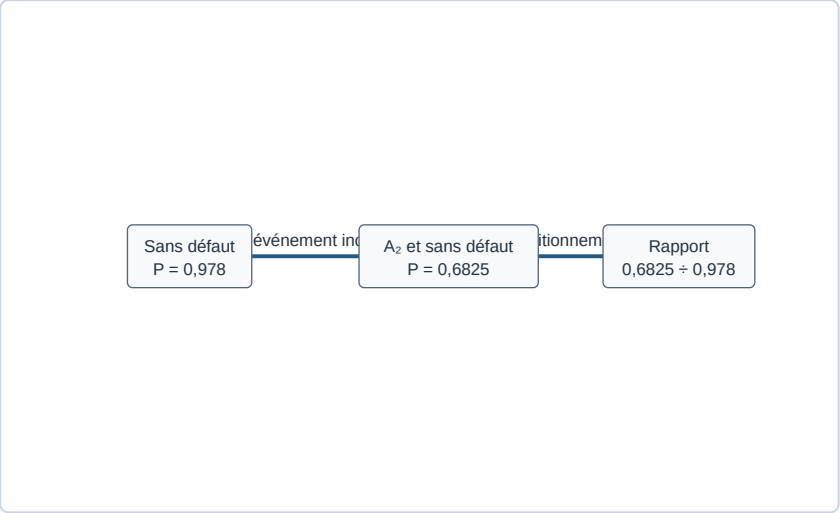
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant qu'un tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle : $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{P(A_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$. Le numérateur vaut $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$, et le dénominateur vaut $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Le quotient donne $0{,}6825 / 0{,}978 \approx 0{,}698$.

Probabilité conditionnelle sachant l'absence de défaut



La probabilité conjointe est divisée par la probabilité de l'événement connu.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

La formule fournie pour une loi exponentielle est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. L'énoncé donne $\lambda = 0{,}0001$, donc $E(T) = \frac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures. En moyenne, un tube fluorescent fonctionne donc 10 000 heures avant de présenter une défaillance.

Espérance de la durée de fonctionnement

Paramètre	Formule	Espérance
λ = 0,0001	E(T) = 1/λ	10 000 heures

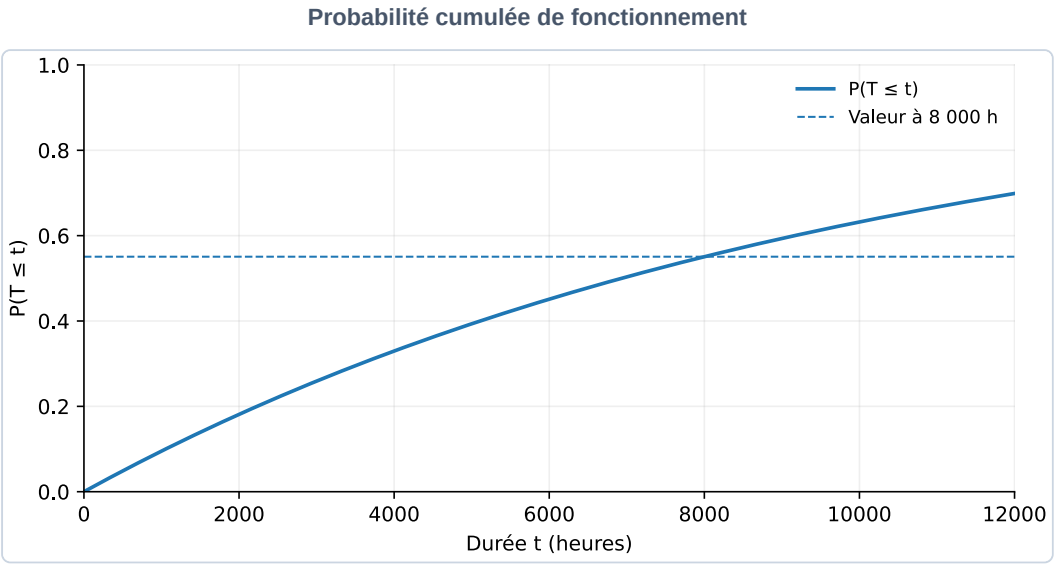
Valeur moyenne associée à la loi exponentielle donnée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(T) = 10\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures, avec un résultat arrondi à 10^{-2}.

Pour la loi exponentielle, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0{,}0001$ et $t = 8\,000$, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507$. La loi étant continue, utiliser $<$ ou $\leq$ ne change pas la probabilité. Arrondie à 10^{-2}, elle vaut 0,55.



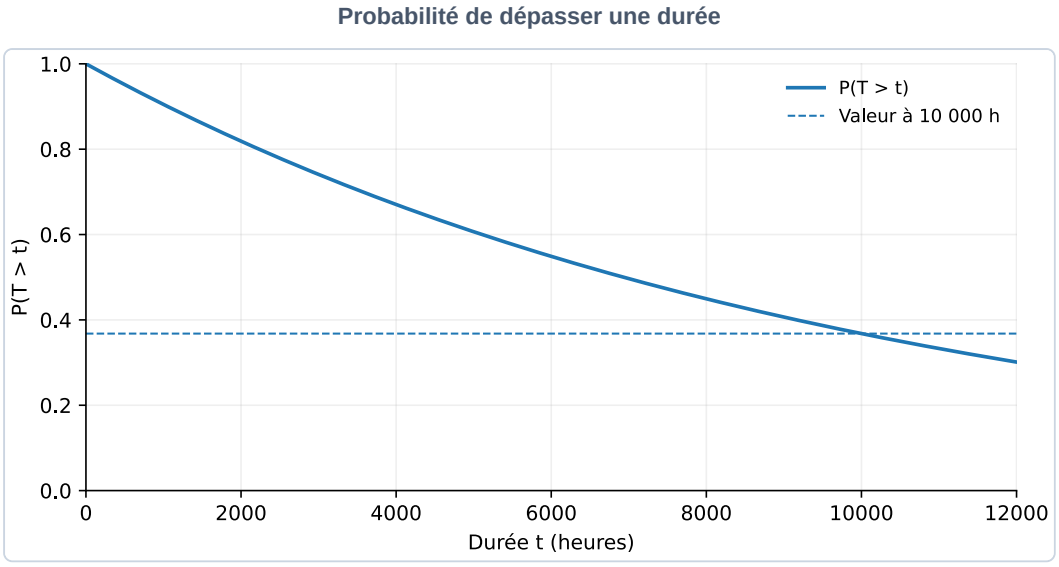
À 8 000 heures, la probabilité cumulée vaut environ 0,5507.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures, avec un résultat arrondi à 10^{-2}.

La probabilité de dépasser une durée t est la probabilité complémentaire de $P(T \leq t)$, soit $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ et $\lambda = 0{,}0001$, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$. Arrondie à 10^{-2}, la probabilité vaut 0,37.



À 10 000 heures, la probabilité de dépasser cette durée vaut environ 0,3679.

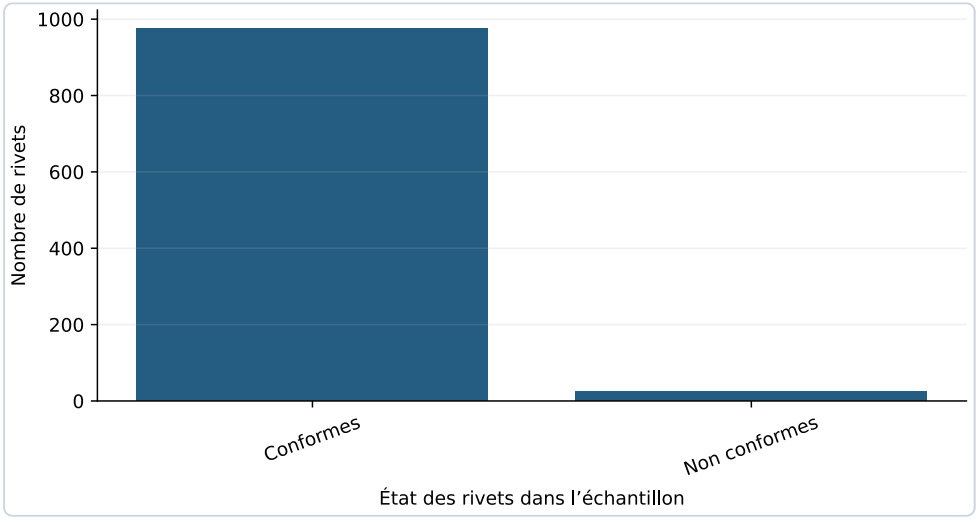
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes : $f = \frac{975}{1\,000} = 0{,}975$. La proportion estimée de rivets conformes dans la production est donc de 97,5 %.

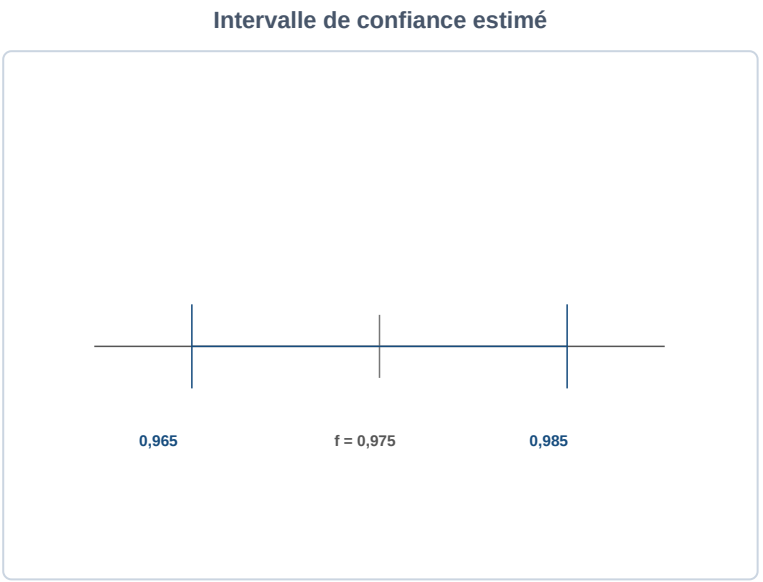


✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À partir de la fréquence f des rivets conformes dans l'échantillon et de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La formule fournie donne l'intervalle $\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$. Avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut environ 0,009677. Les bornes calculées sont 0,965323 et 0,984677 ; arrondies au millième, elles donnent 0,965 et 0,985.



✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est 3. Elle étudie le freinage d'un chariot et la production industrielle, en évaluant équations différentielles, analyse, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, avec a non nul et b constant, les solutions sont y(t) = b/a + Ce^(-at).
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ vaut 5 et la droite y = 5 est une asymptote horizontale.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est [f - 1,96√(f(1-f)/n) ; f + 1,96√(f(1-f)/n)].

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier la solution particulière avant de présenter l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.
- Pour la question sur l'arrêt, distinguer une vitesse qui tend vers 5 d'une vitesse qui atteint zéro.
- Dans une probabilité conditionnelle, identifier l'événement connu et utiliser le bon dénominateur.
- Respecter les arrondis demandés : au centimètre, au centième ou au millième selon la question.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, dont les solutions sont Ce^(-0,8t). Ajouter la solution particulière constante 5, puis utiliser la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer les probabilités de durée de vie avec la loi exponentielle ?

Pour λ = 0,001, utiliser P(T ≤ t) = 1 - e^(-0,001t). Pour une durée supérieure à t, utiliser la probabilité complémentaire e^(-0,001t), puis arrondir le résultat au centième comme demandé.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points. Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment; répartissez votre temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Quels critères faut-il respecter pour obtenir les points ?

Présentez une démarche lisible, justifiez les calculs demandés et répondez dans le contexte. Respectez les arrondis indiqués pour chaque résultat et, pour l'intervalle de confiance, utilisez la formule à 95 % fournie dans le sujet.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2022/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.