Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MECP

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2018/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes ; sa distance parcourue est modélisée par une fonction. L'exercice étudie cette fonction, puis détermine l'aire d'une pièce destinée à l'aménagement des gares à partir d'un graphique et d'une fonction donnée.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène (E0) : y' - 0,2y = 0.

La formule donnée pour $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = -0,2$, donc l'exposant vaut $0,2t$. La constante k est réelle et la fonction obtenue est définie et dérivable sur tout l'intervalle demandé. Elle vérifie bien l'équation homogène : sa dérivée est $0,2ke^{0,2t}$, égale à $0,2y(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle (E) : y' - 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée : $g'(t) = -15$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche, on trouve :

$$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t.$$

Cette expression est exactement le membre de droite de (E). La fonction g vérifie donc l'équation différentielle sur son domaine $[0, 3]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution particulière de (E).

Question 3°. Déduire de la solution particulière donnée l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant à une solution particulière toute solution de l'équation homogène associée. La solution particulière est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $ke^{0,2t}$. On obtient donc toutes les solutions en faisant varier k dans $\mathbb{R}$.

1. Solution particulière : $-15t - 75$.
2. Solution homogène : $ke^{0,2t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f, solution de (E), vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant qu'au temps t = 0 le wagon est au point de départ.

On applique la condition initiale à la solution générale : $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant cette constante, on obtient la fonction recherchée. Sous une forme équivalente, elle s'écrit avec le terme exponentiel et le terme linéaire indiqués ci-dessous. La condition de départ est bien satisfaite, puisque $f(0) = 75 - 75 = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application, question 1

Question a). À partir de l'expression fournie pour f'(t), résoudre sur l'intervalle [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

On utilise l'expression donnée : $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. L'inégalité $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme la fonction exponentielle est croissante, cela équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Chaque valeur de l'intervalle étudié satisfait cette condition, avec égalité en son origine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec $f'(0) = 0$.

Question b). Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

La dérivée est positive sur $]0, 3]$ et nulle en $t = 0$. La fonction f est donc croissante sur $[0, 3]$. Ses valeurs aux bornes sont $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$. Le tableau résume son évolution.

t	**0**	**3**
$f'(t)$	0	+
$f(t)$	0	↗ $16,659$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f croît de 0 à environ $16,659$ sur $[0, 3]$.

B. Étude de fonction et application

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue après une minute est la valeur de la fonction en $t = 1$. En substituant 1 dans l'expression de f, on obtient $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. L'arrondi demandé au dixième conserve un seul chiffre après la virgule. Il s'agit bien de la distance totale depuis le point de départ.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Au bout d'une minute, le wagon a parcouru $1,6$ km.

B. Étude de fonction et application, question 3

Question a). Sachant que la vitesse instantanée du wagon, en kilomètres par minute, est donnée par f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse à l'instant t est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute.

1. À $t = 2$, $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$ km/min.
2. L'arrondi au dixième donne $7,4$ km/min.

Cette unité est celle demandée ici. Pour comparer la vitesse à l'objectif exprimé en kilomètres par heure, il faudra convertir les minutes en heures.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 2 minutes, la vitesse est $7,4$ km/min.

Question b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

L'objectif est de dépasser 400 km/h en moins de deux minutes. La vitesse à deux minutes vaut environ $7,377 \times 60 = 442,642$ km/h. De plus, $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$ est croissante, car sa dérivée est $3e^{0,2t} > 0$. Le seuil est atteint lorsque $15(e^{0,2t} - 1) = 400/60$, soit vers $t = 1,839$ minute.

- $1,839 < 2$ minutes.
- Le seuil des 400 km/h est donc atteint dans le délai prévu.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil de 400 km/h est atteint après environ $1,839$ min, donc avant 2 min.

B. Étude de fonction et application

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 s'écrit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. On a $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. Après développement, le coefficient de t est $15(e^{0,4} - 1)$ et le terme constant est $45e^{0,4} - 75$. Cela correspond à la troisième proposition.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$, troisième proposition.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir, parmi les trois propositions, l'aire A1 du rectangle OPQR en unités d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le rectangle $OPQR$ s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, donc sa largeur est 3 unités. Son bord supérieur est la droite $y = 2,25$, et son bord inférieur est l'axe des abscisses : sa hauteur est donc 2,25 unités. L'aire du rectangle est le produit de ces dimensions, ce qui permet de choisir la bonne proposition.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie de g(x) = 27x/(2x² + 18), calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire cherchée est l'intégrale de g sur cet intervalle. Avec la primitive fournie :

$$A_2 = \left[\tfrac{27}{4}\ln(x^2 + 9)\right]_0^3 = \tfrac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \tfrac{27}{4}\ln 2.$$

La valeur approchée est donnée à trois décimales.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en unités d'aire, et arrondir au millième.

Sur la moitié droite de la pièce, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe. La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées double cette différence. Avec $A_1 = 6,75$ et $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2$, on obtient :

$$A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \tfrac{27}{4}\ln 2\right).$$

On arrondit le résultat au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle observées sur 200 smartphones, puis le nombre d'appareils non réparables dans un lot prélevé au service après-vente. Il se termine par un test bilatéral destiné à vérifier un résultat de sondage sur la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé concernant 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant les appareils touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle.

Sur 200 smartphones, 3 % sont touchés par l'obsolescence technique, soit 6 appareils, et 8 % par l'obsolescence logicielle, soit 16 appareils. Parmi les 16 touchés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont aussi touchés par l'obsolescence technique : cela représente 2 appareils. Les autres effectifs s'obtiennent en retranchant ces valeurs des totaux de ligne et de colonne.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Cases : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux : 16, 184 et 200.

Question 2°. En notant T l'événement « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence technique » et L l'événement « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant L.

Les fréquences données dans l'énoncé correspondent directement aux probabilités des événements : 3 % des smartphones sont touchés par l'obsolescence technique et 8 % par l'obsolescence logicielle. La donnée conditionnelle précise que, parmi les smartphones touchés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont aussi touchés par l'obsolescence technique. On la note donc $P_L(T)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

A. Probabilités conditionnelles, question 3

Question a). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle : P(T ∩ L).

La probabilité que les deux événements se réalisent se calcule avec la probabilité conditionnelle : $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. Les données donnent $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$. Le produit vaut 0,01, soit 1 % des smartphones étudiés.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0{,}010$.

Question b). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence : P(T ∪ L).

Pour calculer la probabilité qu'au moins un des deux types d'obsolescence touche le smartphone, on additionne P(T) et P(L), puis on retranche l'intersection, comptée deux fois dans cette somme. Ainsi, $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}100$.

Question c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité conditionnelle de L sachant T est le quotient de la probabilité de l'intersection par celle de T : $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T)$. Avec $P(T \cap L) = 0{,}01$ et $P(T) = 0{,}03$, on obtient 1/3, soit 0,333 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise : les 50 tirages sont indépendants et la probabilité de tirer un smartphone non réparable reste constante. Pour chaque tirage, le succès choisi est « le smartphone est non réparable », de probabilité 0,045. X compte les succès sur 50 tirages indépendants : c'est donc une variable aléatoire binomiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale B(50 ; 0,045).

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones du lot sont réparables si aucun n'est non réparable, c'est-à-dire si X = 0. Pour un appareil, la probabilité d'être réparable est $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. Les 50 tirages étant indépendants, la probabilité que les 50 appareils soient réparables est $0{,}955^{50}$, soit 0,100 au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = 0) = 0,100 au millième.

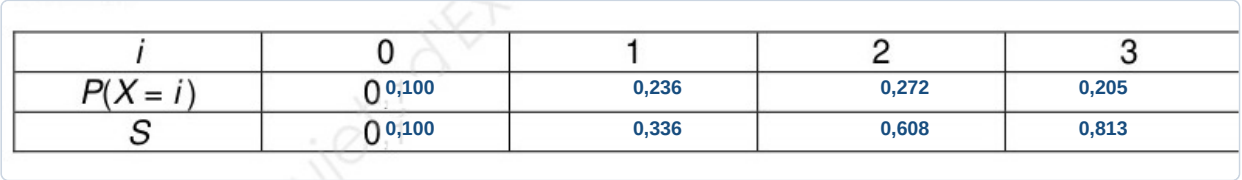
B. Loi binomiale, question 3

Question a). Faire tourner à la main l'algorithme fourni, puis compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S pour i allant de 0 à 3.

On calcule successivement les probabilités binomiales pour i = 0, 1, 2 et 3, puis on les additionne dans l'algorithme. Les valeurs du tableau sont arrondies au millième. Pour les sommes intermédiaires, on utilise les probabilités non arrondies avant d'arrondir le résultat affiché.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau binomial complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, l'algorithme a additionné les probabilités P(X = i) pour i allant de 0 à 3. La somme correspond donc à la probabilité qu'un lot contienne au plus 3 smartphones non réparables. D'après les calculs de la question précédente, cette probabilité est d'environ 0,813.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots comptent au plus 3 smartphones non réparables.

B. Loi binomiale

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables dans un lot.

Pour une variable binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut E(X) = np. Ici, n = 50 et p = 0,045, donc E(X) = 50 × 0,045 = 2,25. Cela signifie qu'en moyenne, un lot de 50 smartphones contient 2,25 appareils non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 2,25 smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. Choisir la valeur de h, parmi les trois propositions, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95, arrondie au centième. Une seule réponse est exacte.

Sous H_0, l'intervalle centré sur la moyenne qui contient 95 % des valeurs s'étend approximativement de 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252. Arrondi au centième, h vaut 0,07, ce qui correspond à la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Au seuil de 5 %, on conserve H_0 lorsque la fréquence observée appartient à l'intervalle central de 95 % défini sous H_0. Avec h arrondi à 0,07, cet intervalle est [0,55 − 0,07 ; 0,55 + 0,07]. Si la fréquence est en dehors de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conserver H_0 si 0,48 ≤ f ≤ 0,62 ; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. Dans l'échantillon de 180 personnes, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Donner la conclusion du test.

La fréquence observée dans l'échantillon est f = 76/180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de conservation de H_0. La fréquence observée appartient donc à la zone de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient dépend de la spécialité, de 1 à 3. L'exercice 1 étudie le démarrage d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce de gare. L'exercice 2 mobilise probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 0, les solutions sont y(t) = k e^(0,2t) ; pour l'équation complète, on ajoute une solution particulière.
- La dérivée de la distance donne la vitesse instantanée ; ici, f'(t) s'exprime en kilomètres par minute.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), P(X=i)=C(n,i)p^i(1-p)^(n-i) et E(X)=np.
- Dans un test bilatéral, comparer la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation construit sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir les kilomètres par minute en kilomètres par heure avant de comparer la vitesse à 400 km/h.
- Pour l'aire, repérer les limites d'intégration, le rectangle OPQR et la symétrie de la pièce.
- Distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T) et utiliser la bonne condition dans chaque calcul.
- Appliquer la règle bilatérale au seuil de 5 % et conclure sans prétendre que l'hypothèse nulle est prouvée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de l'exercice sur le train ?

On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. La constante de la solution générale se détermine avec la condition initiale f(0) = 0.

Q : Comment calculer l'aire sous la courbe de g ?

On évalue une primitive de g aux bornes 0 et 3, puis on soustrait sa valeur en 0 de sa valeur en 3. Pour l'aire totale, on combine le résultat avec l'aire du rectangle et la symétrie indiquée.

Q : Comment gérer les deux heures et les dix points de chaque exercice ?

Répartissez le temps entre les deux exercices, qui valent chacun dix points, et gardez une marge pour vérifier les calculs. Les trois parties de chaque exercice sont indépendantes, ce qui permet de poursuivre même si une question bloque.

Q : Quels critères de notation faut-il particulièrement respecter ?

Présentez une démarche lisible, les formules et les unités adaptées. Respectez les arrondis demandés, justifiez les conclusions sur la vitesse et le test, et répondez sans justification aux QCM comme l'indique le sujet.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmecp.fr/assets/annales/bts-mecp/E2 - Mathématiques/2018/BTS MECP - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de l\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.